NO.

Date 01/03/2018

Μάθημα 2º

Εκτίμηση σε σημείο μιας παραμετρικής $g(\theta)$, $\theta \in \Theta$

- Αξιολόγηση εκτιμητών
- Εισαγωγή κριτηρίων

$$M.T.\Sigma.\,(T(\underline{x}), g(\theta)) = E(T(\underline{x}) - g(\theta))^2 =$$
$$= Var\,T(\underline{x}) + \underbrace{(E(T(\underline{x})) - g(\theta))^2}$$

↓

Να μηδενίζουμε αυτό διότι $g(\theta)$ άγνωστο

↓

αναζητούμε τους αμερόληπτους

Πρόταση: ∄ βέλτιστος εκτιμητής με κριτήριο το Μ.Τ.Σ. της μη σταθερής συνάρτησης.

1º παράδειγμα

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με $E X_i = \mu$ και $Var X_i = \sigma^2$. Τότε:

α) αν μ γνωστή ποσότητα $T(\underline{x}) = \dfrac{\sum (X_i - \mu)^2}{n}$ αμερόληπτος εκτιμητής της σ^2.

β) αν μ άγνωστη τότε:
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) \quad \text{αμερολ. εκτιμητής της } \sigma^2.$$

(Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν)

$Var X = E(X-\mu)^2$
όπου $\mu = EX$ $\quad EX^2 - (EX)^2$

Λύση

α) Α.ν.δ.ο. $E(T(\underline{x})) = \sigma^2$

Είναι.
$$E\,\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Var X_i$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2. \text{ Άρα αμερόληπτος}$$

NO.

Date

(B) μ άγνωστο

Το $E(X_i-\bar{X})^2 \rightarrow$ δεν μπορώ να το υπολογίσω εύκολα

Θα υπολογίσω την αναμενόμενη τιμή του αθροίσματος : $E\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

Είναι: $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_i} + n\bar{X}^2 =$

$\left\{ \bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n} \right.$

$= \Sigma X_i^2 - 2\bar{X}\overbrace{(n\cdot\bar{X})} + n\bar{X}^2 =$

$= \Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2$ (1)

Επομένως: $E\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \overset{(1)}{=} E\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - nE\bar{X}^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n}EX_i^2 - n\cdot E\bar{X}^2 \overset{*}{=}$

$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\mathrm{Var}X_i + (EX_i)^2\right\} - n\left\{\mathrm{Var}\bar{X} + (E\bar{X})^2\right\}$

$= \sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - n\left\{\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right\}$

$= (n-1)\cdot\sigma^2$

(*) $\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2$

$\mathrm{Var}\bar{X} = \mathrm{Var}\frac{\sum^{n} X_i}{n} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum^{n}\mathrm{Var}X_i = \frac{\sigma^2}{n}$

$E\bar{X} = E\frac{1}{n}\Sigma X_i = \frac{1}{n}\Sigma EX_i = \mu$

Άρα: $E\,\Sigma(X_i-\bar{X})^2 = (n-1)\sigma^2$ διαιρώ με το $(n-1)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{E\,\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{n-1} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$

Πρόταση

Το σύνολο των αμερόληπτων εκτιμητών μιας μη σταθερής παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ είναι είτε $\underbrace{\varnothing}_{\text{κανένας}}$, είτε $\underbrace{\text{μονοσύνολο}}_{\text{ένας}}$, είτε $\underbrace{\text{μη αριθμήσιμο}}_{\text{άπειροι αμεροληπτοί εκτιμ.}}$

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν 2 αμερόλ. εκτιμητές της $g(\theta)$, οι $T_1(\underset{\sim}{x})$, $T_2(\underset{\sim}{x})$ με $E(T_1(\underline{x})) = E(T_2(\underline{x})) = g(\theta)$

Τότε ο $aT_1(\underline{x}) + (1-a)T_2(\underline{x})$, (κυρτός συνδυασμός) για $a\in(0,1)$ είναι επίσης αμερόληπτος.

$$E\big(aT_1(\underline{x}) + (1-a)T_2(\underline{x})\big) =$$

$$= a\cdot\underbrace{E\,T_1(\underline{x})}_{=g(\theta)} + (1-a)\underbrace{E\,T_2(\underline{x})}_{=g(\theta)} = g(\theta)$$

Άρα τότε υπάρχουν άπειροι αμερόληπτοι εκτιμητές.

Άρα δε γίνεται να υπάρχουν ακριβώς δύο
$\Rightarrow$ Επομένως ή δεν θα υπάρχει κανένας ή ένας ή άπειροι (όπως δείξαμε)

NO.

Date

π.χ. Για να δείξω ότι υπάρχουν 2 αμερόληπτοι αρκεί ν.δ.ο. υπάρχουν άπειροι.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$

$$\left.\begin{aligned} &E(X_1) = \mu, \quad E X_2 = \mu, \quad E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \mu \\ &E \frac{\Sigma X_i}{n} = \mu \end{aligned}\right\}$$

<u>Παράδειγμα</u>

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από την διωνυμική $B(1, \theta)$

$f(x_i; \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}, \quad x_i = 0, 1$

Θέλω ν.δ.ο. δεν υπάρχει αμερόληπτος εκτιμητής της θ^{n+1} και $\frac{1}{\theta}$

<u>Λύση</u>

αμερόληπτος της $g(\theta) \to E(T(\underset{\sim}{x})) = g(\theta)$

$E(T(\underset{\sim}{X})) = \sum_{\underset{\sim}{x}}{}^{\circledast} t(\underset{\sim}{x}) \cdot \boxed{\text{σ.π. } \underset{\sim}{X}}$

την σπ της από κοινού κατανομής των $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$EX = \begin{cases} \int_x x \cdot f_X(x)\, dx & x: \text{συνεχής} \\ \sum_x x \cdot P(X = x) & x: \text{διακριτή} \end{cases}$$

||

$\circledast$ Οι δυνατές τιμές του $T(\underset{\sim}{X})$

$$\sum_{\underset{\sim}{x}} t(\underset{\sim}{x}) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left\{ \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} \right\}$$

$$= \sum_{\underset{\sim}{x}} t(\underset{\sim}{x}) \cdot \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{1-\Sigma x_i}$$

πολυώνυμο ως προς θ βαθμού <u>το πολύ</u> n.

διότι η μεγαλ. δυνατή τιμή του ΣX_i είναι το n

Ο αμερόληπτος δεν μπορεί να ξεπεράσει το n

NO.

Date

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ.δ. $B(1,\theta)$

0 1 0 1 0 1

2 δυνατές τιμές

Άρα 2^n δυνατές τιμές

$\underset{\sim}{X}$

$\sum^n Y_i : 0, 1, \ldots, n$ (δυνατές τιμές)

Άρα:
Δεν μπορώ να βρω
αμερόληπτο του θ^{n+1}
διότι είναι μεγαλύτερου
βαθμού από το n.

και

Δεν μπορώ να βρω αμερόληπτο
εκτιμητή για το $1/\theta$
γιατί το $\frac{1}{\theta}$ δεν μπορεί να γραφτεί σαν πολυώνυμο.

(για το θ^2 θα μπορούσαμε διότι $2 < n$.
(για τα $(\theta - \theta^2)$, $\theta(1-\theta)$ επίσης))

για το θ^{n+7} δεν μπορώ αφού $n+7 > n$

Άρα λειτουργούν σαν αντιπαραδείγματα.

Επομένως στην άσκηση το σύνολο των

αμερόληπτων είναι το $\varnothing$

NO.

Date

Παράδειγμα 2ο

Έστω $X \sim Poisson(\theta)$.

Άρα: $f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$, $x = 0,1,2,\dots$

Ν.δ.ο. υπάρχει μοναδικός αμερόληπτος της θ.

Λύση

έχω μια παρατήρηση

$E(T(X)) = \theta$ για αμεροληψία

$E(T(X)) = \sum_{x=0,1,2,\dots} t(x) \cdot \boxed{\text{σ.π. της } X}$

Το X παίρνει διακριτές τιμές

δεν έχω τ.δ. αλλά μόνο μια τ.μ.

$\Rightarrow E(T(X)) = \sum_{x=0}^{+\infty} t(x) \cdot \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}$

Εγώ θέλω $ET(X) = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} t(x) \cdot \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!} = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} t(x) \frac{\theta^x}{x!} = \theta \cdot e^{\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} t(x) \cdot \frac{\theta^x}{x!} = \theta \cdot \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\theta^x}{x!}$ (δυναμοσειρά)

$\Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} t(x) \cdot \frac{\theta^x}{x!} = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\theta^{x+1}}{x!}$

Θέτω: $x+1 = y \Rightarrow x = y-1$ $\quad x=0 \rightarrow y=1$.

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} t(x)\,\frac{\theta^x}{x!} = \sum_{y=1}^{+\infty} \frac{\theta^y}{(y-1)!} \xrightarrow[\text{μεταβλητής}]{\text{αλλαγή}}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} t(x)\cdot\frac{\theta^x}{x!} = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\theta^x}{(x-1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{t(0)\theta^0}_{} + \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{t(x)\cdot\theta^x}{x!}}_{} = \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\theta^x}{(x-1)!}}_{} + \underbrace{0\cdot\theta^0}_{}$$

<u>Άρα:</u> $t(0) = 0$ και $\frac{t(x)}{x!} = \frac{1}{(x-1)!}$, για $x=1,2,\ldots$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{x!}{(x-1)!}, \quad x=1,2,\ldots$$

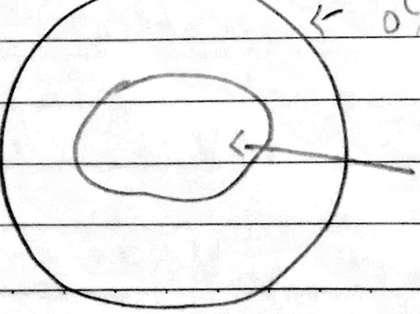
<u>Επομένως:</u> $\boxed{t(x) = x}$ για $x=0,1,2,\ldots$

<u>Άρα:</u> $E(T(x)) = E(X)$

ο μοναδικός αμερόληπτος της θ.

$\Rightarrow$ Είναι: $M.T.\Sigma.(T(x), g(\theta)) =$

$$= \underbrace{Var\,T}_{} + (E\,T(x) - g(\theta))^2$$



← όλοι οι εκτιμητές → δεν μπορώ να βρω τον βέλτιστο

αμερόληπτοι (άπειροι)

↳ ο βέλτιστος αυτός με την μικρότερη διακύμανση

NO.

Date

Ορισμός

Α.	Ο.	Ε.	Δ.
Μ	Μ	Λ	Ι
Ε	Ο	Α	Α
Ρ	Ι	Χ	Κ
Ο	Ο	Ι	Υ
Λ	Μ	Σ	Μ
Η	Ο	Τ	Α
Π	Ρ	Η	Ν
Τ	Φ	Σ	Σ
Ο	Ο		Η
Σ	Σ		Σ

Ένας εκτιμητής $T(\underline{x})$ της μη σταθερής παραμ. συνάρτησης της $g(\theta)$ λέγεται Α.Ο.Ε.Δ. αν έχει την μικρότερη διασπορά - διακύμανση απ' όλους τους αμερόληπτους εκτιμητές της $g(\theta)$ για κάθε $\theta \in \Theta$

δηλ. $E(T(x)) = g(\theta)$

<u>και</u> $Var\, T \leq Var\, T^* \quad \forall \theta$

<u>και</u> $\forall T^*$ με $ET^* = g(\theta)$

NO

Date

Πρόταση

Αν υπάρχει ένας Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής της $g(\theta)$ με πεπερασμένη διακύμανση, τότε είναι μοναδικός

Απόδειξη

Έστω $T(x)$ Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής της $g(\theta)$ επιπλέον υποθέτω ότι υπάρχει και ένας 2ος ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\theta)$. $\to$ $T_1(x)$

ΝΔΟ $E(T(x)) = E(T_1(x)) = g(\theta)$

και

$\text{Var}\, T(x) = \text{Var}\, T_1(x)$ (αφού ΑΟΕΔ)

και για κάθε άλλο αμερόληπτο, έστω $T^*(x)$, ισχύει :

$\text{Var}\,(T(x)) = \text{Var}\,(T_1(x)) \leq \text{Var}\, T^*(x)$

Επιλέγω $T^*(x) = \dfrac{T(x) + T_1(x)}{2}$
(επιλέγω έναν κυρτό συνδυασμό των T, T_1)

Όντως, $E\, \dfrac{T(x) + T_1(x)}{2} = g(\theta)$ αμερόληπτος

Θα υπολογίσω την $\text{Var}\, T^*(x)$

Είναι: $\text{Var}\left\{ \frac{1}{2} T(x) + \frac{1}{2} T_1(x) \right\}$ Τα T, T_1 δεν είναι ανεξάρ

$\left(= \frac{1}{4} \text{Var}\,(T(x)) + \frac{1}{4} \text{Var}\, T_1(x) \right.$ θα ίσχυε αν τα T, T_1 ανεξάρτητα$\left. \right)$

NO

Date

Όταν τα X, Y είναι εξαρτημένα:

$$Var(aX + \beta Y) = a^2 Var X + \beta^2 Var Y + 2a\beta\, Cov(X, Y)$$

$$Var X = E(X-\mu_x)^2$$

$$Var Y = E(Y-\mu_y)^2$$

$$Cov(X,Y) = E\{[X-\mu_x][Y-\mu_y]\} = EXY - EX \cdot EY$$

<u>Άρα:</u>

$$Var\left\{\frac{1}{2}T(x) + \frac{1}{2}T_1(x)\right\} = \frac{1}{4}Var\,T(x) + \frac{1}{4}Var\,T_1(x) + 2\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot Cov(T, T_1)$$

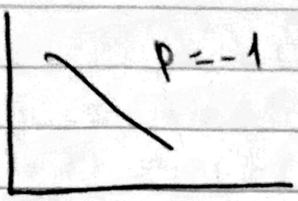
<u>Ισχύει</u>

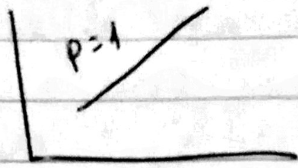
$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X}\cdot\sqrt{Var Y}}}$$

καθαρός αριθμός

(συντελεστής)

$-1 \le \rho(X,Y) \le 1$





Όταν $\rho = 1$, $Y = \alpha + \beta X$

Άρα: $Var\,T^*(x) = \frac{1}{4} Var\,T + \frac{1}{4} Var\,T_1 + \frac{1}{2} Cov(T,T_1)$

$\rho(x,y) \le 1 \Rightarrow Cov(X,Y) \le \sqrt{VarX} \cdot \sqrt{VarY}$

Άρα: $Var\,T^*(X) \le \frac{1}{4} Var\,T + \frac{1}{4} Var\,T_1 + \frac{1}{2} \sqrt{Var\,T} \cdot \sqrt{Var\,T_1}$

$= Var\,T$

άτοπο

Η ισότητα ισχύει όταν $Cov(X,Y) = \sqrt{VarX} \cdot \sqrt{VarY}$
(που ισχύει όταν $Y = \alpha + \beta X$)

Άρα θα ισχύει όταν $T(x) = \alpha + \beta T_1(x)$ ⊛

$ET = g(\theta) \Rightarrow g(\theta) = \alpha + \beta g(\theta)$ Αφού T, T_1 ΑΟΕΛ

$\mathrm{Var}\,T = \mathrm{Var}\,T_1$ (Αφού ΑΟΕΔ)

Δηλ $\mathrm{Var}\,T \overset{*}{=} \beta^2 \cdot \mathrm{Var}\,T_1(x)$

Επομένως $\beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm 1$

- Έστω $\underline{\beta = 1}$: $g(\theta) = a + g(\theta) \Rightarrow \underline{a = 0}$

  Άρα $T(x) = T_1(x)$ άτοπο

- Έστω $\underline{\beta = -1}$: $T(x) = a - T_1(x)$ $\underline{\text{άτοπο}}$

(Άρα συνδέονται με αρνητική συσχέτιση $\rho = -1$)

(h) $g(\theta) = a - g(\theta) \Rightarrow g(\theta) = a/2$

άτοπο γιατί $\frac{a}{2}$ σταθερό ενώ

$g(\theta)$ μη σταθερή

Παρατηρήσεις

1. Αν με κάποιον τρόπο βρω έναν ΑΟΕΔ εκτιμητή δε χρειάζεται να βρω άλλον, αυτός είναι μοναδικός
2. Η ύπαρξη ΑΟΕΔ εκτιμητή προϋποθέτει την ύπαρξη αμερόληπτου εκτιμητή.
3. Υπάρχουν περιπτώσεις που για κάποιες παραμετρικές συναρτήσεις υπάρχει ένας και μόνο ένας αμερόληπτος. Σε αυτές ... περιπτώσεις αυτός είναι και ο ΑΟΕΔ (π.χ. το παράδειγμα με τη Poisson(θ))

NO.

Date

(4) Υπάρχουν περιπτώσεις που υπάρχουν αμερόληπτοι αλλά δεν υπάρχουν ΑΟΕΔ

Υπάρχουν 2 μεθοδολογίες εύρεσης ΑΟΕΔ εκτιμητή.

> Η πρώτη μεθοδολογία στηρίζεται στο κάτω φράγμα της ανισότητας των Cramer-Rao.

Αυτή η 1η μεθοδολογία εφαρμόζεται μόνο υπό κάποιες συνθήκες και όταν δουλεύει είναι η πιο γρήγορη και η πιο εύκολη, αλλά, όπως ήδη είπαμε, δε δουλεύει πάντα και δεν προσδιορίζει ΑΟΕΔ εκτιμητές για όλες τις παραμετρικές συναρτήσεις. Επομένως, όταν ή αν την εφαρμόσουμε, όταν δεν δουλεύει είναι μεγάλο λάθος.

Άρα η 1η μεθοδολογία ισχύει υπό συνθήκες.

Συνθήκες ομαλότητας

Έστω X μία τ.μ. με σ.π.π. $f(x,\theta)$ (συνεχή)

Λέμε ότι η οικογένεια κατανομών της X ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

α) Ο Θ είναι ανοιχτό διάστημα $\subseteq \mathbb{R}$.

β) Η σ.π.π. $f(x;\theta)$ είναι θετική σ' ένα σύνολο D ανεξάρτητο του θ.

γ) Υπάρχει $\forall \theta \in \Theta$ και $\forall x \in D$ η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)$ και είναι πεπερασμένη εκτός από κάποια $x \in N$ τ.ω. $P(X \in N) = 0 \ \forall \theta$.

NO.

Date

δ) $\int \frac{\partial}{\partial \theta} f(x,\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial \theta}\int f(x,\theta)\,dx$

ε) Να ισχύει ότι $\forall \theta$: $0 < I(\theta) < +\infty$
όπου: $I(\theta) = E\left[\frac{d}{d\theta}\ln f(x;\theta)\right]^2$

Ερώτημα:
Ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας για την:

$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}$, $\underline{0 \leq x \leq \theta}$;

$U(0,\theta)$ ομοιόμορφη.

ΟΧΙ: γιατί το $D = [0,\theta]$ δεν είναι ανεξάρτητο του θ
άρα δεν ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας.

$\boxed{\text{ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ}}$

Λέμε ότι μία κατανομή ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών αν η σπ.π ή η σ.π. της $f(x;\theta)$ μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή:

$$f(x;\theta) = c(\theta)\cdot h(x)\cdot e^{Q(\theta)\cdot T(x)}, \quad x \in A$$

όπου A ανεξάρτητο του θ.

Παρατήρηση
Οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται για κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών.
Τέτοιες είναι:
Poisson(θ), Εκθ(θ), $B(1,\theta)$, $N(\mu,\theta)$

NO

Date

Όπως αναλυτικά θα αποδείξουμε στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν στην συνέχεια του μαθήματος.

Ανισότητα Cramer-Rao

Έστω $T(x)$ μια στατιστική συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(x) f(x;\theta)\,dx$$

Υποθέτουμε ότι για την $f(x;\theta)$ ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας. Τότε:

$$Var\,T \geq \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \theta} E(T(x))\right]^2}{I_x(\theta)}$$

όπου $I_x(\theta) = n\,I(\theta)$

$I(\theta) \rightarrow$ μέτρο πληροφορίας του Fisher.

$$I_x(\theta) = n\,I(\theta) \Rightarrow I_x(\theta) = E\left(\frac{d}{\partial \theta} \ln f(x;\theta)\right)^2$$

Απόδειξη.

Ισχύει: $\rho(X,Y) \leq 1 \Rightarrow Cov(X,Y) \leq \sqrt{Var X} \cdot \sqrt{Var Y} \Rightarrow$

$\Rightarrow Cov^2(X,Y) \leq Var X \cdot Var Y$.

Ασχολούμαστε με το 2ο μέλος.

$$\Rightarrow n\cdot E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right)^2 =$$

$$= n\cdot\left\{ Var\,\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) + \underbrace{E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln F(x;\theta)\right)^2}\right\}$$

$$EX^2 = Var\,X + (EX)^2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln F(x;\theta)\right) = \int \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\, F(x,\theta)\, dx =$$

$$E\,h(x) \overset{X:\text{συνεχ.}}{=} \int h(x)\cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{f(x,\theta)}}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)\cdot \cancel{f(x,\theta)}\cdot dx =$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)\, dx \overset{(8)}{=} \frac{\partial}{\partial\theta}\cancelto{1}{\int f(x,\theta)dx} = 0$$

Άρα:

$$n\cdot E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right)^2 = n\cdot Var\,\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$$

$$\ln f(\underline{X},\theta) = \ln \prod_{i=1}^{n} f(x,\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta)$$

Άρα, $n \operatorname{Var} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta) = \operatorname{Var}\left[\ln \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{X},\theta)\right]$

Άρα, $\underbrace{\text{α.ν.δ.ο.}}$

$$E(T(x)) = \operatorname{Cov}\left(T(x), \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{X},\theta)\right)$$

Ισχύει:
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cov}^2\left(T(x), \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{X},\theta)\right) \leq \\ \leq \operatorname{Var} T(x) \cdot \operatorname{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{X},\theta)\right) \end{array} \right\}$$

$$\operatorname{Cov}\left(T(\underline{x}), \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{x},\theta)\right) =$$

$$= E\left[T(x) \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{x},\theta)\right] - E\,T(x) \cdot \cancel{E \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{x},\theta)}^{\,0} =$$

$$= E\left[T(x) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{x},\theta)\right] =$$

$$= \int T(x) \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{X},\theta)\, f(\underline{X},\theta)\, dx =$$

$$= \int T(x) \cdot \frac{1}{\cancel{f(\underline{x},\theta)}} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} f(\underline{x},\theta) \cdot \cancel{f(\underline{x},\theta)}\, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} \int T(x) \cdot f(\underline{x},\theta)\, dx = \frac{\partial}{\partial\theta} E(T(x))$$

■

Συνοψίζοντας, αποδείξαμε ότι:

$$\operatorname{Var} T \geq \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \theta} E(T(x))\right]^2}{n \cdot I(\theta)}$$

κάτω φράγμα της ανισότητας C-R

<u>1η ερώτηση</u>: Πότε επιτυγχάνεται η ισότητα;

<u>Απ</u>: Όταν $T(x) = a + b \dfrac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x;\theta)$

$$b \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underset{\sim}{x};\theta) = T(x) - a \overset{b \neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x};\theta) = \frac{1}{b}\left[T(x) - a\right]$$

<u>ή καλύτερα</u>

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x};\theta) = k(\theta, n)\left[T(x) - g(\theta)\right]$$

SOS

NO.

Date

Ασκήσεις για Σπίτι

① $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Τ.Δ. από έναν πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2. Από το σύνολο των γραμμικών αμερόληπτων εκτιμητών της μέσης τιμής $T(x) = \sum a_i X_i$ βρείτε αυτόν με την ελάχιστη διακύμανση.

Απ: $\bar{X}$ (δε θέλει ΑΟΕΔ εδώ)

② $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ΤΔ. από την κανονική με μ, σ^2.

Να βρείτε το Μ.Τ.Σ. (S^2, σ^2), το ΜΤΣ (cS^2, σ^2) για $c>0$ και να εξετάσετε πότε ο S^2 είναι καλύτερος από τον cS^2 (για ποιες τιμές του c δλδ) (Διαφορά τους > 0)

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε αυτό: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$